Conceptos previos

# Serie de Taylor

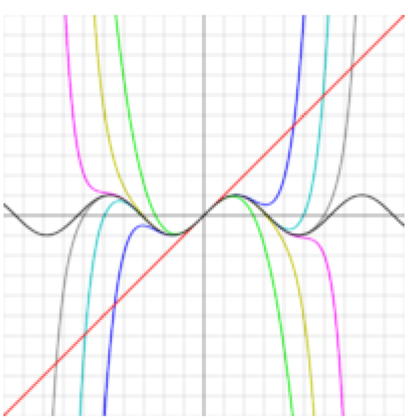
## Historia

El filósofo eleata Zenón de Elea consideró el problema de sumar una serie infinita para lograr un resultado finito, pero lo descartó por considerarlo imposible: el resultado fueron las paradojas de Zenón. Posteriormente, Aristóteles propuso una resolución filosófica a la paradoja, pero el contenido matemático de esta no quedo resuelto hasta que lo retomaron Demócrito y después Arquímedes. Fue a través del método exhaustivo de Arquímedes que un número infinito de subdivisiones geométricas progresivas podían alcanzar un resultado trigonométrico finito.[1] Independientemente, Liu Hui utilizó un método similar cientos de años después.[2]

En el siglo XIV, los primeros ejemplos del uso de series de Taylor y métodos similares fueron dados por Madhava of Sangamagrama.[3] A pesar de que hoy en día ningún registro de su trabajo ha sobrevivido a los años, escritos de matemáticos hindúes posteriores sugieren que él encontró un número de casos especiales de la serie de Taylor, incluidos aquellos para las funciones trigonométricas del seno, coseno, tangente y arcotangente.

En el siglo XVII, James Gregory también trabajó en esta área y publicó varias series de Maclaurin. Pero recién en 1715 se presentó una forma general para construir estas series para todas las funciones para las que existe y fue presentado por Brook Taylor, de quién recibe su nombre.

En matemáticas, la **serie de Taylor** de una función *f(x)* infinitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto ($a-r$, $a+r$) se define con la siguiente suma:



sin(x) y aproximaciones de Taylor centradas en 0, con polinomios de grado 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Aquí, $n!$ es el factorial $n$ y $f^{(n)}(a)$ indica la n-ésima derivada de $f$ en el punto $a$.

Si esta serie converge para todo $x$ perteneciente al intervalo $(a-r, a+r)$ y la suma es igual a $f(x)$, entonces la función $f(x)$ se llama **analítica**. Para comprobar si la serie converge a $f(x)$, se suele utilizar una estimación del resto del teorema de Taylor. Una función es analítica si y solo si se puede representar con una serie de potencias; los coeficientes de esa serie son necesariamente los determinados en la fórmula de la serie de Taylor.

Si $a = 0$, a la serie se le llama **serie de Maclaurin**.

Esta representación tiene tres ventajas importantes:

- La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales.
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de la función.
- Es posible demostrar que, si es viable la transformación de una función a una serie de Taylor, es la óptima aproximación posible.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor porque tienen alguna singularidad. En estos casos normalmente se puede conseguir un desarrollo en serie utilizando potencias negativas de $x$ (véase Serie de Laurent. Por ejemplo $f(x) = \exp(-1/x^2)$ se puede desarrollar como serie de Laurent.

## Definición :

La serie de Taylor de una función $f$ de números reales o complejos que es infinitamente diferenciable en un entorno de números reales o complejos $a$, es la serie de potencias:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

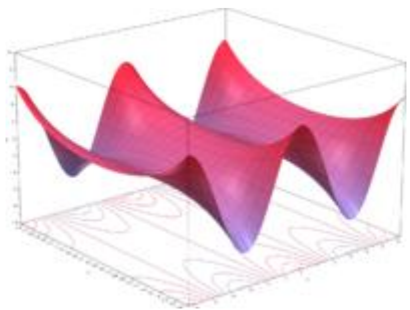
que puede ser escrito de una manera más compacta como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

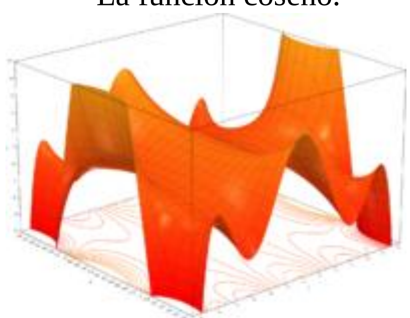
donde $n!$ es el factorial de $n$ y $f^{(n)}(a)$ denota la n-ésima derivada de $f$ en el punto $a$; la derivada cero de $f$ es definida como la propia $f$ y $(x-a)^0$ y $0!$ son ambos definidos como uno.

Las series de Maclaurin fueron nombradas así por Colin Maclaurin, un profesor de Edinburgo, quién publicó el caso especial de las series de Taylor en el siglo XVIII.

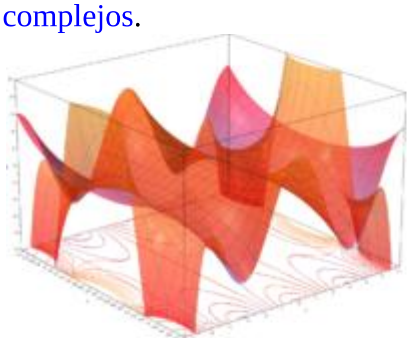
## Series de Taylor notables:



La función coseno.



Una aproximación de octavo orden de la función coseno en el plano de los complejos.



Las dos imágenes de arriba puestas juntas.

A continuación se enumeran algunas series de Taylor de funciones importantes. Todos los desarrollos son también válidos para valores complejos de $x$.

**Función exponencial y logaritmo natural:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{para } |x| < 1$$

**Serie geométrica**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{para } |x| < 1$$

**Teorema del binomio**

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C(\alpha, n) x^n$$ para todo $|x| < 1$ y cualquier $\alpha$ complejo

**Funciones trigonométricas**

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{para todo } x$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para todo } x$$
$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \text{para } |x| < \frac{\pi}{2}$$
$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para } |x| < \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

**Funciones hiperbólicas:**

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{para todo } x$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para todo } x$$

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \text{para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sinh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

$$\tanh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

**Función W de Lambert**:

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \quad \text{para } |x| < \frac{1}{e}$$

Los números $B_k$ que aparecen en los desarrollos de tan($x$) y tanh($x$) son Números de Bernoulli. Los valores C($\alpha$,$n$) del desarrollo del binomio son los coeficientes binomiales. Los $E_k$ del desarrollo de sec($x$) son Números de Euler.

## Dimensiones Múltiples

La serie de Taylor se puede generalizar a funciones de más de una variable con la siguiente fórmula:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{\partial^{n_1}}{\partial x^{n_1}} \cdots \frac{\partial^{n_d}}{\partial x^{n_d}} \frac{f(a_1, \cdots, a_d)}{n_1! \cdots n_d!} (x_1 - a_1)^{n_1} \cdots (x_d - a_d)^{n_d}$$

Por ejemplo, para una función de 2 variables, $x$ e $y$, la serie de Taylor de segundo orden en un entorno del punto ($a$, $b$) es::

$$\begin{aligned} & f(x,y) \\ & \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right). \end{aligned}$$

Un polinomio de Taylor de segundo grado puede ser escrito de manera compacta así ..

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \cdots$$

donde $\nabla f(\mathbf{a})$ es el gradiente y $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ es la matriz hessiana. Otra forma:

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\mathrm{D}^{\alpha} f(\mathbf{a})}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha}$$